

4-й семестр, БМТ (2018)
Операционное исчисление и уравнения матем. физики
модуль 2, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Простой теоретический вопрос (№1 и №2)

1. Дать определение полного нормированного пространства и гильбертова пространства. (4 балла)
2. Дать определение полной ортонормированной системы. (4 балла)
3. Дать определение ряда Фурье данного элемента евклидова пространства по заданной ортогональной системе. (4 балла)
4. Записать неравенство Бесселя. (4 балла)
5. Записать равенство Парсеваля. Дать определение замкнутой ортонормированной системы. (4 балла)
6. Записать тригонометрический ряд. Как определяются коэффициенты тригонометрического ряда Фурье? (4 балла)
7. Сформулировать теорему Дирихле. (4 балла)
8. Сформулировать теорему о связи замкнутости и полноты ортонормированной системы. (4 балла)
9. Дать определение полного евклидова пространства. Дать определение гильбертова пространства. Дать определение пространства $L_2[a, b]$. (4 балла)
10. Сформулировать задачу Штурма — Лиувилля. Сколько вариантов задачи существует в одномерном случае? (4 балла)
11. Записать уравнение Бесселя. Сколько функций содержит фундаментальная система решений этого уравнения? (4 балла)
12. Дать определение цилиндрической функции. Привести пример такой функции. (4 балла)
13. Дать определение функции Бесселя. (4 балла)
14. Записать формулы для норм функций Бесселя. (4 балла)
15. Дать определение функций Бесселя II рода. (4 балла)
16. Дайте определение Гамма-функции Эйлера. Запишите основные свойства этой функции. (4 балла)
17. Сформулируйте задачу Штурма — Лиувилля для шара. Опишите вид собственных функций для этой задачи. (4 балла)
18. Запишите уравнение Лежандра. Опишите все ограниченные решения этого уравнения. (4 балла)
19. Дайте определение многочлена Лежандра. Сформулируйте свойство ортогональности этих многочленов. (4 балла)
20. Запишите присоединенное уравнение Лежандра. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. (4 балла)
21. Запишите квадраты норм многочленов Лежандра и присоединенных функций Лежандра. (4 балла)
22. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулируйте основные свойства гармонической функции. (4 балла)

Дополнительный теоретический вопрос (№3)

1. Доказать, что если элемент представлен суммой ряда по ортогональной системе, то коэффициенты ряда вычисляются по формулам Эйлера — Фурье. (4 балла)
2. Доказать неравенство Бесселя. (4 балла)

3. Доказать, что элемент евклидова пространства есть сумма своего ряда Фурье тогда и только тогда, когда верно равенство Парсеваля. (4 балла)
4. Доказать минимальное свойство ряда Фурье. (4 балла)
5. Доказать, что замкнутая ортогональная система является полной. (4 балла)
6. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. (4 балла)
7. Доказать, что оператор Штурма — Лиувилля в случае однородных граничных условий является самосопряженным. (4 балла)
8. Доказать, что оператор Штурма — Лиувилля не имеет отрицательных собственных значений. В каких случаях он имеет нулевое собственное значение? (4 балла)
9. Найти собственные функции оператора Лапласа для прямоугольника. (4 балла)
10. Найти собственные функции оператора Лапласа для круга. (4 балла)
11. Найти собственные функции оператора Лапласа для кольца. (4 балла)
12. Докажите основные свойства Гамма-функции Эйлера. (4 балла)
13. Выведите 1-ю формулу Грина. (4 балла)
14. Выведите 2-ю формулу Грина. (4 балла)
15. Какую функцию называют гармонической в области? Сформулируйте и докажите теорему о среднем значении для гармонической функции. (4 балла)

Типовой вариант билета (задачи)

1. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике (6 баллов):

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$u|_{x=0} = \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad u|_{x=a} = \cos \frac{7\pi y}{2b}, \quad u'_y|_{y=0} = \sin \frac{5\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

2. Решите следующую краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце (5 баллов):

$$\Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$u|_{r=1} = 1 + \sin^2 \varphi, \quad u'_r|_{r=2} = \cos \varphi.$$

3. Найти фундаментальное решение линейного оператора

$$\frac{d^2}{dx^2} - 6\frac{d}{dx} + 9I$$

(6 баллов)

4. Проверить, является ли функция $u(x, y, z) = \frac{(x^2 - y^2)z}{(x^2 + y^2)^2}$ гармонической. Если является, то указать, в какой области. (5 баллов)

Типовой вариант билета (теория)

1. Записать равенство Парсеваля. Дать определение замкнутой ортонормированной системы. (4 балла)
2. Дайте определение Гамма-функции Эйлера. Запишите основные свойства этой функции. (4 балла)
3. Доказать, что замкнутая ортогональная система является полной. (4 балла)